

A tárgy neve	EUKLIDESZI GEOMETRIA
Meghirdető tanszék(csoport)	SZTE TTK Matematikai Tanszékcsoport
Felelős oktató:	Dr. Kurusa Árpád
Kredit	5+2
Heti óraszám	2+2
típus	E+Gy
Számonkérés	K+Gyj
Teljesíthetőség feltétele	
Párhuzamosan feltétel	
Előfeltétel	
Helyettesítő tárgyak	
Periódus	tavaszi
Javasolt félév	2.
Kötelező vagy kötelezően választható	Matematika alapszak

AJÁNLOTT IRODALOM

A.N. Kolmogorov, Sz.V. Fomin: A függvényelmélet és a funkcionálanalízis elemei

Szabó Zoltán: Bevezető fejezetek a geometriába

H.S.M. Coxeter: A geometriák alapjai

R. Courant, H. Robbins: Mi a matematika?

Reiman I.: Geometria és határterületei

Jövőre jelenik meg „Kurusa Árpád: Bevezető a geometriához”

A TANTÁRGY RÉSZLETES TEMATIKÁJA

A középiskolákban a geometria már régebb óta szinte csak a háromszögek szerkesztése, a szögfüggvények és a „koordináta-geometria” tartalmakat hordozza. Ritkán van szó transzformációkról, és a vektorok és terek is csak zűrés tapasztalati formában jelennek meg.

Célunk az, hogy olyan módon vezessük be a geometriát a friss egyetemi hallgatók számára, hogy azok pontos fogalmakon keresztül lássák meg a geometriai gondolkodás szépségét és tartalmát az axiómáktól a kiépült geometriai elméletben való gondolkodásig.

A rendszer átláthatósága és a helyes geometriai szemlélet gyors kialakítására alkalmasan választott „erős” axiómarendszerrel hamar lehetővé válik a középiskolában megszokotthoz igen hasonló geometriai környezet kialakítása, de még így is képtelenség a tematika teljes anyagát bizonyításokkal együtt prezentálni, ezért az előadás nem a bizonyításokra, hanem a fogalmak megértésére és az azok közti logikai kapcsolatokra épít.

A geometria axiomatikája

Affin sík

Illeszkedési axiómák:

- Létezik legalább két különböző egyenes, és bármely egyenesre legalább két különböző pont illeszkedik.
- Két különböző pontra egy és csak egy egyenes illeszkedik.
- (Párhuzamossági axióma) Minden g egyeneshez és P ponthoz pontosan egy P pontra illeszkedő, a g egyenessel párhuzamos egyenes létezik.

Párhuzamosság tulajdonságai.

Rendezési axiómák:

- Minden egyenesen adott egy teljes rendezés
- (Pasch axióma) Ha egy egyenes egy háromszög egyik csúcsára sem illeszkedik, de van közös pontja valamely oldallal, akkor pontosan még egy másik oldalt metsz.

Szakasz, félegyenes, félsík.

Folytonossági axiómák

- minden Q ponthoz és őt tartalmazó g egyeneshez léteznek a Q ponttól különböző P és R pontok a g egyenesen, hogy P és R közrefogja a Q pontot,
- (Dedekind axióma) minden szakasz minden Q részhalmazához létezik olyan Q_- és Q_+ pont a szakaszon, hogy Q_- és Q_+ közrefogja minden Q pontját és bármely a Q részhalmaz minden pontját közrefogó X és Y pont közrefogja a Q_- és Q_+ pontokat is.

Affin sík. Kollineációk csoportja. Parallelogramma. Desargues-tulajdonság.

Euklideszi sík

Metrikus axiómák:

- $d(P,Q)=0$ pontosan akkor, ha $P=Q$;
- $d(P,Q)=d(Q,P)$, vagyis a leképezés szimmetrikus;
- Minden P,Q,R ponthármasra teljesül a háromszög-egyenlőtlenség, miszerint:
 - a $d(P,R) \leq d(P,Q)+d(Q,R)$, és
 - egyenlőség pontosan akkor, ha P, Q, R kollineáris.

Izometriák csoportja.

Egyenesre tükrözés axiómája:

- Minden egyeneshez létezik olyan izometria, amely az egyenes minden egyes pontját helyben hagyja, és az egyeneshez tartozó két félsíkot felcseréli egymással.

Euklideszi sík.

Affin tér

Illeszkedési axiómák, köztük a párhuzamossági axióma. Síkok és egyenesek párhuzamossága, ennek tulajdonságai.

Rendezési axiómák, köztük a Pasch-axióma. Féltér.

Folytonossági axiómák, köztük a Dedekind-axióma. Affin tér.

Desargues tétele. Az affin tér síkjai Desargues-síkok.

Euklideszi tér

Metrika, benne a háromszög-egyenlőtlenség. Izometriák csoportja.

Síkra tükrözés axiómája, Euklideszi tér.

Az Euklideszi tér síkjai Euklideszi síkok.

Affin geometria

Kötött vektorok

Rendezett pontpárok. Összeadás definíciója és tulajdonságai. A paralelogramma-ekvivalenciareláció. Párhuzamos szelők tétele.

Szabad vektorok

Kötött vektorok paralelogramma-ekvivalenciaosztályai. Egyértelmű reprezentálás tétele.

Összeadás definíciója. Szabad vektorok additív csoportja kommutatív.

Egész számmal való szorzás asszociatív, disztributív, monoton. Egész számmal való oszthatóság. Racionális számmal való szorzás asszociatív, disztributív, monoton. Valós számmal való szorzás határpontos definíciója. Valós számmal

való szorzás asszociatív, disztributív, monoton. Szabad vektorok vektorteret alkotnak.

Szabad vektor többszöröseinek és bármely reprezentánsa egyenesének szigorúan monoton, kanonikus bijekciója.

Helyvektorok

Szabadvektorok origóból induló reprezentánsai. Műveletek és tulajdonságaik, parallelogramma-szabály. Kanonikus izomorfia a szabad vektorok vektorterével.

Osztóviszony definíciója. Párhuzamos szelők tétele. Kollineációk tartják az osztóviszonyt.

A sík helyvektorainak vektortere kettő-, a tér helyvektorainak vektortere pedig háromdimenziós.

Koordinátázás

Pontok és helyvektorok közti bijekció és a helyvektorok terének egy bázisára vonatkozó bázisbontásban szereplő valós együtthatópárok illetve hármások. Az \mathbb{R}^2 és \mathbb{R}^3 koordinátateret a helyvektorok vektorterével izomorf vektorteret alkotnak.

Egyenesek és síkok koordinátatérbeli egyenlete. Két egyenes illetve sík akkor és csak akkor párhuzamos, ha koordinátatérbeli egyenleteik egymás többszörösei. Az \mathbb{R}^2 illetve \mathbb{R}^3 koordinátatér az egyenesek illetve síkok koordinátatérbeli egyenleteinek megoldásait, mint (koordináta-) egyeneseket illetve síkokat tekintve, Desargues-síkot illetve teret alkot.

Koordináta-transzformációk és affinitások

Különböző koordinátázások közti átmenet-transzformációk a koordináták illetve a pontok halmazán. Ezek bijektívek. Az affín transzformációk tartják az egyeneseket, a koordináta-transzformációk tartják a koordináta-egyeneseket.

A koordináta-transzformációk alakja: $(x,y) \rightarrow (a,b) + (x,y)M$, ahol M egy nem elfajuló 2×2 -es illetve tér esetén 3×3 -as mátrix.

A kollineációk pontosan az affín transzformációk. Tengelyes affín transzformáció és nyírás definíciója. Irányítást tartó affinitások – ezek nem kommutatív csoportot alkotnak. Közös fixponttal rendelkező két tengelyes affinitás szorzata akkor és csak akkor független a sorrendjüktől, ha nem fix tengelyeik egybeesnek.

Konvexitás

Konvexitás definíciója. Konvex lineáris kombináció. Konvex lineáris kombinációt mindig meghatároz legfeljebb 3 illetve 4 pont: szimplexek.

Konvex burok, ponthalmaz konvex burka, politopok. Radon tétele, Helly tétele, Young tétele.

A félsíkok illetve félterek metszetei, a poligonok illetve poliéderek pontosan a politopok. Euler tétele.

Metrikák

Minkowski-metrika definíciója. Euklideszi metrika definíciója a parallelogramma-azonossággal.

A Minkowski-metrika a helyvektortereken normát definiál. Bármely helyvektortéren adott bármely normából Minkowski-metrika származtatható, mely éppen az adott normát határozza meg a helyvektortéren. Gömbszerű halmazok és indukáltság definíciója. Az indukáltság szimmetrikus, szigorúan konvex. Minden gömbszerű halmaz meghatároz egy normát, melynek indukáltsága éppen az őt definiáló gömbszerű halmaz.

Normált vektortérben ortogonalitás definíciója. Pythagoraszi norma definíciója. A Minkowski-metrika normája akkor és csak akkor Pythagoraszi, ha a Minkowski-metrika Euklideszi. Euklideszi szorzás definíciója a Pythagoraszi normából.

Euklideszi geometria

Merőlegesség definíciója a tükrözési axióma alapján. Merőleges állítás egyértelműsége.

Egyenesen a valós számok és a pontok adott ponttól mért távolságainak bijektív kapcsolata. Felezőmerőleges. A távolság Minkowski metrika. Párhuzamos szelők tétele távolságokra. Bármely két kitérő egyeneshez pontosan egy normáltranszverzális létezik. Osztóviszony a távolságra alapozva.

A távolságtartó leképezések, vagyis az izometriák bijektív affinitások és csoportot alkotnak. Konjugálás.

Síkizometriák

Fixpontok száma szerinti osztályozás alapján tükrözésekből való előállítás. Minden síkizometria előáll legfeljebb három tengelyes tükrözés szorzataként.

A síkizometriák összes lehetséges típusai az identikus transzformáció, a tengelyes tükrözések, az eltolások, a forgások és a csúsztatva tükrözések.

Tengelyes tükrözések

Tengelyes tükrözések tulajdonságai: Involúciók; Egyezés pontosan a tengelyek megegyezése esetén; Három közös pontra illeszkedő, vagy párhuzamos egyenesre vonatkozó tükrözések szorzata tengelyes tükrözés, és a szorzat két szélső tényezője felcserélhető; Konjugáltja a tengely transzformáltjára vonatkozó tükrözés; Felcserélhetőség csak a tengelyek merőlegessége vagy egyezősége esetén; Páratlan számú tengelyes tükrözés szorzata nem fejezhető ki páros számú tengelyes tükrözés szorzataként.

Az izometriák tartják a merőlegességet.

Forgatások

Forgatás definíciója: két metsző tengelyre vonatkozó tükrözés szorzata. Azonos centrumú forgások egyértelmű reprezentálási tétele. Azonos centrumú forgások kommutatív csoportot alkotnak. Egy forgás tengelyeit a centrum körül tetszőlegesen elforgatva a forgás nem változik. Bármely két, a centruból induló félegyeneshez pontosan egy forgás létezik a centruban, amelyik az egyiket a másikba transzformálja.

Centrális tükrözések

Centrális tükrözés, az a forgás, ahol a két tükrözés tengelye merőleges egymásra. Centrális tükrözések tulajdonságai: involúciók; egyezés pontosan a centrumok megegyezése esetén; a centrum felezi az α - és β -képpont távolságát; a centrumon áthaladó egyeneseket invariánsan hagyja; három centrális tükrözés szorzata centrális tükrözés, és a szorzat két szélső tényezője felcserélhető.

Eltolások

Eltolás definíciója: két párhuzamos tengelyre vonatkozó tükrözés szorzata. Az eltolások két centrális tükrözés szorzataként is előállnak, és ezek közül az egyik tetszőlegesen választható, a másik pedig akkor már egyértelműen meghatározott. Az eltolások kommutatív csoportot alkotnak. Egy párhuzamos eltolás tengelyeit tetszőlegesen párhuzamosan eltolva, a párhuzamos eltolás nem változik. Bármely két ponthoz pontosan egy párhuzamos eltolás létezik, amelyik az egyiket a másikba transzformálja. A párhuzamos eltolások minden egyenest önmagukkal párhuzamos egyenesbe transzformálnak.

Csúsztatva tükrözések

Mindig választható három olyan tengely, hogy egy párhuzamos eltolás és egy olyan tengelyes tükrözés szorzataként áll elő, amelynek tengelye az eltolás irányával párhuzamos.

Síkmozgások

Páros sok tükrözés szorzatai, illetve irányítástartó izometriák. Forgások és párhuzamos eltolások szorzata is forgás vagy párhuzamos eltolás. Két félegyeneshez pontosan egy olyan mozgás létezik, amelyik az egyik félegyeneset a másik félegyenesre transzformálja.

Térizometriák

Fixpontok száma szerinti osztályozás alapján síkra vonatkozó tükrözésekből való előállítás. Minden térizometria legfeljebb négy síkra vonatkozó tükrözés szorzataként állítható elő.

A térizometriák összes lehetséges típusai az identikus transzformáció, a síkra vonatkozó tükrözések, az eltolások, a (tengelyes) forgások, a csúsztatva tükrözések, a forgatva tükrözések és a csavarmozgások.

Síkra tükrözések

Síkra tükrözések tulajdonságai: Involúciók; Egyezés pontosan a síkok megegyezése esetén; Három közös egyenesre illeszkedő, vagy párhuzamos síkra vonatkozó tükrözés szorzata síkra vonatkozó tükrözés, és a szorzat két szélső tényezője felcserélhető; Konjugáltja a sík transzformáltjára vonatkozó tükrözés; Felcserélhetőség csak a síkok merőlegessége vagy egyezősége esetén; Páratlan számú síkra vonatkozó tükrözés szorzata nem fejezhető ki páros számú síkra vonatkozó tükrözés szorzataként.

Az izometriák tartják a síkok és így az egyenesek merőlegességet is.

Forgatások

Forgatás definíciója: két metsző síkra vonatkozó tükrözés szorzata. Azonos tengelyű forgások egyértelmű reprezentálási tétele. Azonos tengelyű forgások kommutatív csoportot alkotnak. Egy forgás síkjait a tengely körül tetszőlegesen elforgatva a forgás nem változik. Bármely két, a tengely által határolt félsíkhoz pontosan egy forgás létezik a tengely körül, amelyik az egyiket a másikba transzformálja.

Tengelyes tükrözések

Tengelyes tükrözés, az a forgás, ahol a két tükrözés síkja merőleges egymásra. Tengelyes tükrözések tulajdonságai: involúciók; egyezés pontosan a tengelyek megegyezése esetén; a tengely az ős- és képpont felezőmerőlegese; a tengelyen áthaladó egyeneseket invariánsan hagyja; három párhuzamos tengelyre vonatkozó tengelyes tükrözés szorzata tengelyes tükrözés, és a szorzat két szélső tényezője felcserélhető.

Eltolások

Eltolás definíciója: két párhuzamos síkra vonatkozó tükrözés szorzata. Az eltolások két párhuzamos tengelyes tükrözés szorzataként is előállnak. Az eltolások kommutatív csoportot alkotnak. Egy párhuzamos eltolás síkjait tetszőlegesen párhuzamosan eltolva, a párhuzamos eltolás nem változik. Bármely két ponthoz pontosan egy párhuzamos eltolás létezik, amelyik az egyiket a másikba transzformálja. A párhuzamos eltolások minden egyenest önmagukkal párhuzamos egyenesbe transzformálnak.

Csúsztatva tükrözések

Mindig választható három olyan sík, hogy egy párhuzamos eltolás és egy olyan tengelyes tükrözés szorzataként álljon elő, amelynek síkja az eltolás irányával párhuzamos.

Forgatva tükrözések

Mindig választható három olyan sík, hogy egy forgás és egy olyan síkra vonatkozó tükrözés szorzataként álljon elő, amelynek síkja a forgás tengelyére merőleges.

Térmozgások

Páros sok síkra vonatkozó tükrözés szorzata, illetve irányítástartó tétizometriák. Ezek a csavarmozgások. Bármely két zászlóhoz egy és csak egy mozgás létezik, amelyik az egyiket a másikba transzformálja.

Egybevágóságok

Két tartomány közti távolságtartó szürjektív leképezés. Két alakzat akkor és csak akkor egybevágó, ha létezik olyan izometria, mely őket egymásra képezi.

Homotéciák

Távolságarányokat tartó leképezések. A homotéciák bijektívek és csoportot alkotnak. A homotéciák szorzatának együtthatója a homotéciák együtthatóinak szorzata. A centrális homotéciák (dilatációk) párhuzamosságot tartó homotéciák. Minden homotécia egy izometria és egy centrális homotécia szorzata, ezért a homotécia tartja a párhuzamosságot is.

A nem izometrikus homotéciáknak létezik pontosan egy fixpontja.

Hasonlóságok

Két tartomány hasonló, ha köztük létezik távolságarányt tartó szürjektív leképezés. Két alakzat akkor és csak akkor hasonló, ha létezik olyan homotécia, mely őket egymásra képezi.

Affinitások

Az affinitások tartják a (metrikus) osztóviszonyt. Minden síkaffinitás egy izometria és két merőleges affinitás szorzata, ahol ez utóbbiak nem fix tengelyei merőlegesek egymásra. Minden síkaffinitás egy tengelyes affinitás és egy homotécia szorzata. A merőlegességet tartó affinitások a homotéciák.

Projektivitások

Kettősviszonytartó leképezések. A bijektív projektivitások affinitások. Perspektivitás. A perspektivitások projektív leképezések.

Szimmetriacsoportok

Alakzatokat invariánsan hagyó izometriák csoportja. Szimmetrikus csoport. Szabályos alakzatok, poligonok és poliéderek.

Szögek

Rendezett, közös kezdőpontú félegyenespárok. A kötött szögek mozgás-relációja ekvivalencia. A kötött szögek mozgás-ekvivalenciaosztályai a szabad szögek. Egyértelmű reprezentáció tétele.

Szabad szögek összeadása. A szabad szögek Abel-csoportot alkotnak. Egyenesszög.

Szögmérés, mint bijektív, additív leképezés az $R/2\varepsilon$ halmazra, amelynek értéke az egyenes szögre éppen ε .

Szögtartó leképezések

A szögmértéket tartó bijektív leképezések homotéciák. Inverzió definíciója. Az inverzió nem bijektív szögtartó leképezés, mely a kögyeneseket (körök és egyenesek) tartja. Minden kögyeneseket tartó leképezés egy homotécia és egy inverzió szorzata.

Szögfüggvények

A távolság Euklideszi metrika. A nem eltűnő helyvektorok Euklideszi szorzata elosztva a benne szereplő helyvektorok normájával valós számot rendel a félegyenespárokhoz. Ez a szám mozgásinvariáns.

Koszinusz és szinusz definíciója, addíciós tételek. Koszinusz és szinusz tétel.

Diszkrét mozgáscsoportok

Csoport-hatás, pálya. Diszkrét mozgáscsoport definíciója, szabályos pontrendszerek, Dirichlet-cella. Szabályos pontrendszerek szimmetria csoportja, kristályok, Barlow tétele. Diszkrét síkmozgáscsoportok osztályozása.

Terület

Területmérés axiomatikus definíciója. A poligonok halmazán pontosan egy területmérés létezik, és ez a „szokásos” terület-számítási formulákat követi. Az azonos területű poligonok egymásba egyenesekkel átdarabolhatóak. Vektoriális szorzat.

Térfogat

Térfogatmérés axiomatikus definíciója. A poliéderek halmazán pontosan egy térfogatmérés létezik, és ez a „szokásos” térfogat-számítási formulákat követi.

Létezik két azonos térfogatú tetraéder, melyek nem darabolhatóak át egymásba.
Vegyes-szorzat.

Kúpszeletek

Kúp és sík metszetei: ellipszis, parabola, hiperbola. A kúpszeletek metrikus geometriai definíciói a direktrixtől és a fókuszról vett távolságok arányával, illetve a fókuszoktól vett távolságokkal. Kúpszeletek érintőinek szögfelezési tulajdonsága. Excentricitás. A kúpszeletek pontosan a koordinátákban másodrendű egyenletet teljesítő ponthalmazok.